

DOI: 10.3724/SP.J.1140.2009.03149

# AVO 理论公式表达形式的差异性和统一性

潘海滨<sup>1</sup>, 何拥军<sup>2,3</sup>, 张勇<sup>2,3</sup>

(1 中国地质大学 工程技术学院, 北京 100083; 2 国土资源部 海洋油气资源和环境地质重点实验室, 青岛 266071;  
3 青岛海洋地质研究所, 青岛 266071)

**摘要:** Knott(诺特)方程是 AVO 理论公式的位移位表达形式。同一个弹性界面的边值定解问题在数学上的不同表述方式将导致 Knott 方程出现多种表达形式。研究表明, XOZ 平面内, P 和 SV 平面简谐波入射到弹性界面时遵循的 Knott 方程共有 8 种独立表达形式, 其中纵波和横波各有 4 种; 对于相同类型的平面简谐波入射和相同的入射介质, 不同形式的 Knott 方程可以完全统一于相同表达形式的能量平衡方程。

**关键词:** Knott 方程; 弹性界面; 二维平面; 拉梅方程; 入射方式

中图分类号: P315 文献标识码: A 文章编号: 0256-1492(2009)03-0149-05

平面简谐波入射到两个半空间弹性介质之间的水平界面, 入射波以及反射和透射波的振幅之间存在一定的关系<sup>[1-3,6]</sup>, 这正是目前地球物理勘探研究热点问题 AVO。AVO 理论应用于实际是基于位移形式 Zoeppritz 方程的诸多近似公式, 而 Knott 方程是与 Zoeppritz 方程相对应的位移位的表达形式, 对其展开深入研究对于弹性波传播理论研究和油气勘探等应用领域具有重要意义。

## 1 影响因素与 Knott 方程

假定两个半空间的弹性介质满足均匀弹性各向同性单相的条件。选择 XOZ 平面直角坐标系, 界面两侧分别为介质 1 和 2。XOZ 平面直角坐标系可以考虑 Z 轴向上为正的物理坐标系和 Z 轴向下为正的地质勘探坐标系。拉梅曾证明任何一个矢量如果在定义域内存在散度和旋度, 则该矢量可以用一个标量位  $\varphi$  的梯度和一个矢量位  $\psi$  的旋度之和来表示, 而拉梅方程又可分为左手形式(即  $\vec{u} = \nabla\varphi - \nabla \times \psi$ )或右手形式(即  $\vec{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \psi$ )<sup>[4-5]</sup>。每个坐标系可以出现从 4 个象限斜入射界面的 4 种情况, 这里考察平面简谐 P 波和 SV 波正常入射界面的情形。在选定 XOZ 平面下, 考虑坐标系的勘探和物理两种情况, 拉梅方程的左手和右手两种形式, 每种坐标系中入射波 P 波和 SV 波各有 4 种方式共 16 种表达形式<sup>[7]</sup>。

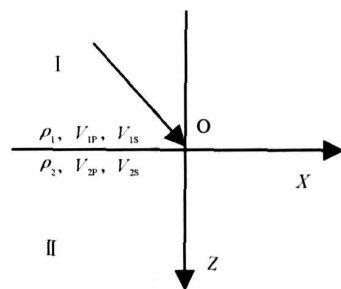


图 1 波入射弹性界面

Fig. 1 Wave incidence in elastic plane

### 1.1 二维 XOZ 平面

二维平面的选择决定位移矢量中分量的取舍即决定位移分量的表达形式, 位移分量的表达形式又制约着拉梅方程中位移位的表达形式, 从而导致位移位表达的边界条件出现不同的形式。

本文取定的 XOZ 二维平面需要考虑位移矢量  $\vec{u}$  的  $u_x$  和  $u_z$  两个分量, 此时关于自变量  $y$  的空间导数项为零。应力和位移连续的边界条件分别涉及应力分量  $\sigma_{zz}$  和  $\sigma_{xz}$  以及位移分量  $u_x$  和  $u_z$ , 而  $\sigma_{zz}$  和  $\sigma_{xz}$  两个应力分量又都与  $u_x$  和  $u_z$  位移分量相关联, 这时保留的  $u_x$  和  $u_z$  两个分量都与标量位移位  $\varphi$  和矢量位移位  $\psi$  的  $y$  分量  $\psi_y$  有关。XOZ、YOZ 平面的情形可以进行类似的处理。

### 1.2 拉梅方程和边界条件

Knott 方程的导出需要弹性界面的边值定解条件, 而边值定解条件的表述需要拉梅方程。拉梅方程分为左手和右手两种形式, 有关学者分别采用不

作者简介: 潘海滨(1984—), 男, 硕士生, 从事勘探地球物理工作, E-mail: bhphb525@163.com

收稿日期: 2009-03-10; 改回日期: 2009-04-21. 周立君编辑

同的形式导出过表达形式有所差异的 Knott 方程<sup>[8-9]</sup>。由此可知,在选定的 XOZ 二维平面,拉梅方程的不同表达形式将导致 Knott 方程出现不同的表达形式。

(1) 左手拉梅方程和边界条件

位移与位移位函数满足的左手拉梅方程为:

$$\vec{u} = \nabla\varphi - \nabla \times \psi \tag{1a}$$

其中标量位函数  $\varphi$  和矢量位函数  $\psi$  满足

$$\begin{cases} \nabla\varphi = l_x \varphi_i + l_y \varphi_j + l_z \varphi_k \\ \nabla \times \psi = (l_y \psi_k - l_z \psi_j) \vec{i} + (l_z \psi_k - l_x \psi_j) \vec{j} + \\ (l_x \psi_j - l_y \psi_k) \vec{k} \end{cases} \tag{1b}$$

把(1b)式代入(1a)式,得到三维空间左手拉梅方程的表达式:

$$\vec{u} = (l_x \varphi - l_y \psi_k + l_z \psi_j) \vec{i} + (l_y \varphi - l_z \psi_k + l_x \psi_j) \vec{j} + (l_z \varphi - l_x \psi_j + l_y \psi_k) \vec{k}$$

在 XOZ 二维平面,得到  $\vec{u}$  的  $u_x$  和  $u_z$  分量为:

$$u_x = l_x \varphi + l_z \psi, \quad u_z = l_z \varphi - l_x \psi \tag{2}$$

位移位  $\varphi$  和  $\psi$  满足的边界条件是:

$$\begin{cases} (\lambda_1 + 2\mu_1) l_z^2 \varphi_1 + \lambda_1 l_x^2 \varphi_1 - 2\mu_1 l_z l_x \psi = \\ (\lambda_2 + 2\mu_2) l_z^2 \varphi_2 + \lambda_2 l_x^2 \varphi_2 - 2\mu_2 l_z l_x \psi \\ 2\mu_1 l_z l_x \varphi_1 - \mu_1 l_x^2 \psi + \mu_1 l_z^2 \psi = \\ 2\mu_2 l_z l_x \varphi_2 - \mu_2 l_x^2 \psi + \mu_2 l_z^2 \psi \\ l_z \varphi_1 - l_x \psi = l_z \varphi_2 - l_x \psi \\ l_x \varphi_1 + l_z \psi = l_x \varphi_2 + l_z \psi \end{cases} \tag{3}$$

(2) 右手拉梅方程和边界条件

位移与位移位函数满足的右手拉梅方程为:

$$\vec{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \psi \tag{4}$$

在 XOZ 平面,得到  $\vec{u}$  的  $u_x$  和  $u_z$  分量为:

$$u_x = l_x \varphi - l_z \psi, \quad u_z = l_z \varphi + l_x \psi \tag{5}$$

基于(4)和(5)式,得到位移位  $\varphi$  和  $\psi$  满足的边界条件为:

$$\begin{cases} (\lambda_1 + 2\mu_1) l_z^2 \varphi_1 + \lambda_1 l_x^2 \varphi_1 + 2\mu_1 l_z l_x \psi = \\ (\lambda_2 + 2\mu_2) l_z^2 \varphi_2 + \lambda_2 l_x^2 \varphi_2 + 2\mu_2 l_z l_x \psi \\ 2\mu_1 l_z l_x \varphi_1 + \mu_1 l_x^2 \psi - \mu_1 l_z^2 \psi = \\ 2\mu_2 l_z l_x \varphi_2 + \mu_2 l_x^2 \psi - \mu_2 l_z^2 \psi \\ l_z \varphi_1 + l_x \psi = l_z \varphi_2 + l_x \psi \\ l_x \varphi_1 - l_z \psi = l_x \varphi_2 - l_z \psi \end{cases} \tag{6}$$

比较(3)和(6)式可以发现,两式中含有  $\psi$  和  $\psi$  的项符号刚好相反。

1.3 XOZ 坐标系与波的入射方式

坐标系的选择决定着入射和反射及透射平面波的表达形式,因此,对于相同方位(如从东北向西南)的入射波,地震勘探和物理两种坐标系中,平面波的

方向余弦  $n_z$  的符号相反,而  $n_x$  则符号相同,从而导致 Knott 方程表达形式上的差异。

在 XOZ 平面内,频率波数域的平面波函数可以写作:

$$\phi = f[k(n_x x + n_z z - Vt)] \tag{7}$$

其中,  $k$  为波数;  $n_x$  和  $n_z$  为平面波的方向余弦即单位法线矢量的分量;  $V$  是波传播的相速度<sup>[10]</sup>。

对于 Z 轴向上的物理坐标系,由坐标原点向第一象限的出射波,  $n_x$  和  $n_z$  都取正号;由原点向第二象限的出射波,  $n_x$  为负,而  $n_z$  为正;由原点向第三象限的出射波,  $n_x$  和  $n_z$  都为负;由原点向第四象限的出射波,  $n_x$  为正,而  $n_z$  为负。对于 Z 轴向下的地震勘探坐标系中  $n_x$  和  $n_z$  的正或负取法与物理坐标系的取法原则相同。

2 Knott 方程的表达形式

令  $\rho_1, V_{1P}$  和  $V_{1S}$  分别是介质 1 的密度和纵横波速度;  $\rho_2, V_{2P}$  和  $V_{2S}$  分别是介质 2 的密度和纵横波速度。  $\alpha_1$  和  $\beta_1$  分别是介质 1 中 P 波和 SV 波下行(或上行)射线与界面法向的夹角。  $\alpha_2$  和  $\beta_2$  分别是介质 2 中 P 波和 SV 波下行(或上行)射线与界面法向的夹角。

2.1 P 波入射的 Knott 方程

P 平面简谐波入射到弹性界面时, Knott 方程的导出过程总共有 16 种情形。通过比较分析这 16 种情形的结果可以知道:仅存在 4 种独立的 Knott 方程表达形式。

P 波从介质 1 入射弹性界面时存在两种表达形式:

$$[N_1^{P1} \quad N_2^{P1} \quad N_3^{P1} \quad N_4^{P1}] R_{P1} = B_{P1} \tag{8}$$

$$[N_1^{P1} \quad -N_2^{P1} \quad N_3^{P1} \quad -N_4^{P1}] R_{P1} = B_{P1} \tag{9}$$

其中系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} N_1^{P1} \\ N_2^{P1} \\ N_3^{P1} \\ N_4^{P1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sin\alpha_1 & \frac{V_{1P}}{V_{1S}} \cos\beta_1 & -\frac{V_{1P}}{V_{2P}} \sin\alpha_2 & \frac{V_{1P}}{V_{2S}} \cos\beta_2 \\ \cos\alpha_1 & -\frac{V_{1P}}{V_{1S}} \sin\beta_1 & \frac{V_{1P}}{V_{2P}} \cos\alpha_2 & \frac{V_{1P}}{V_{2S}} \sin\beta_2 \\ \sin 2\alpha_1 & \frac{V_{1P}^2}{V_{1S}^2} \cos 2\beta_1 & \frac{\rho_2 V_{2S}^2 V_{1P}^2}{\rho_1 V_{1S}^2 V_{2P}^2} \sin 2\alpha_2 & -\frac{\rho_2 V_{1P}^2}{\rho_1 V_{1S}^2} \cos 2\beta_2 \\ -\cos 2\beta_1 & \sin 2\beta_1 & \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos 2\beta_2 & \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin 2\beta_2 \end{bmatrix}$$

反射和透射系数矩阵为:

$$R_{P1} = [R_{1P1P} \quad R_{1P1S} \quad T_{1P2P} \quad T_{1P2S}]^T$$

矩阵  $B_{P1}$  为

$$B_{P1} = [-\sin\alpha_1 \quad \cos\alpha_1 \quad \sin 2\alpha_1 \quad \cos 2\beta_1]^T$$

上述(8)和(9)式中,  $R_{1P1P}$  为反射 P 波与入射 P 波的振幅比,  $R_{1P1S}$  为反射 SV 波与入射 P 波的振幅比,  $T_{1P2P}$  为透射 P 波与入射 P 波的振幅比,  $T_{1P2S}$  为透射 SV 波与入射 P 波的振幅比。

P 波从介质 2 入射弹性界面时, 也存在两种表达形式, 它们为:

$$[N_1^{P2} \quad N_2^{P2} \quad N_3^{P2} \quad N_4^{P2}] R_{P2} = B_{P2} \quad (10)$$

$$[N_1^{P2} \quad -N_2^{P2} \quad N_3^{P2} \quad -N_4^{P2}] R_{P2} = B_{P2} \quad (11)$$

其中系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} N_1^{P2} \\ N_2^{P2} \\ N_3^{P2} \\ N_4^{P2} \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} -\sin\alpha_2 & \frac{V_{2P}}{V_{2S}} \cos\beta_2 & \frac{V_{2P}}{V_{1P}} \sin\alpha_1 & \frac{V_{2P}}{V_{1S}} \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \frac{V_{2P}}{V_{2S}} \sin\beta_2 & \frac{V_{2P}}{V_{1P}} \cos\alpha_1 & -\frac{V_{2P}}{V_{1S}} \sin\beta_1 \\ \sin 2\alpha_2 & -\frac{V_{2P}^2}{V_{2S}^2} \cos 2\beta_2 & \frac{\rho_1 V_{1S}^2 V_{2P}^2}{\rho_2 V_{2S}^2 V_{1P}^2} \sin 2\alpha_1 & \frac{\rho_1 V_{2P}^2}{\rho_2 V_{2S}^2} \cos 2\beta_1 \\ -\cos 2\beta_2 & -\sin 2\beta_2 & \frac{\rho_1}{\rho_2} \cos 2\beta_1 & -\frac{\rho_1}{\rho_2} \sin 2\beta_1 \end{bmatrix}$$

反射和透射系数矩阵为:

$$R_{P2} = [R_{2P2P} \quad R_{2P2S} \quad T_{2P1P} \quad T_{2P1S}]^T$$

矩阵  $B_{P2}$  为:

$$B_{P2} = [\sin\alpha_2 \quad \cos\alpha_2 \quad \sin 2\alpha_2 \quad \cos 2\beta_2]^T$$

比较上述公式(8)至(11)可以知道:(8)和(9)两式的转换横波反射系数  $R_{1P1S}$  的符号彼此相反, 转换横波透射系数  $R_{1P2S}$  也相反,(10)和(11)两式也是如此。

### 2.2 SV 波入射的 Knott 方程

同样 SV 波自介质 1 入射弹性界面时存在两种形式, 它们是:

$$[N_1^{SV1} \quad N_2^{SV1} \quad N_3^{SV1} \quad N_4^{SV1}] R_{SV1} = B_{SV1} \quad (12)$$

$$[-N_1^{SV1} \quad N_2^{SV1} \quad -N_3^{SV1} \quad N_4^{SV1}] R_{SV1} = B_{SV1} \quad (13)$$

其中系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} N_1^{SV1} \\ N_2^{SV1} \\ N_3^{SV1} \\ N_4^{SV1} \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} \sin\beta_1 & \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & \frac{V_{1S}}{V_{2S}} \cos\beta_2 \\ \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & \frac{V_{1P}}{V_{2P}} \cos\alpha_2 & \sin\alpha_1 \\ -\cos 2\beta_1 & \sin 2\beta_1 & \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos 2\beta_2 & \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin 2\beta_2 \\ -\frac{V_{1S}^2}{V_{1P}^2} \sin 2\alpha_1 & -\cos 2\beta_1 & -\frac{\rho_2 V_{2S}^2}{\rho_1 V_{2P}^2} \sin 2\alpha_2 & \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos 2\beta_2 \end{bmatrix}$$

反射和透射系数矩阵为:

$$R_{SV1} = [R_{1S1P} \quad R_{1S1S} \quad T_{1S2P} \quad T_{1S2S}]^T$$

矩阵  $B_{SV1}$  为:

$$B_{SV1} = [\cos\beta_1 \quad \sin\alpha_1 \quad \sin 2\beta_1 \quad \cos 2\beta_1]^T$$

SV 波从介质 2 入射弹性界面时也存在两种形式, 它们是:

$$[N_1^{SV2} \quad N_2^{SV2} \quad N_3^{SV2} \quad N_4^{SV2}] R_{SV2} = B_{SV2} \quad (14)$$

$$[-N_1^{SV2} \quad N_2^{SV2} \quad -N_3^{SV2} \quad N_4^{SV2}] R_{SV2} = B_{SV2} \quad (15)$$

其中系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} N_1^{SV2} \\ N_2^{SV2} \\ N_3^{SV2} \\ N_4^{SV2} \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} -\sin\beta_2 & \cos\beta_2 & \sin\beta_2 & \frac{V_{2S}}{V_{1S}} \cos\beta_1 \\ -\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & -\frac{V_{2P}}{V_{1P}} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_2 \\ \cos 2\beta_2 & \sin 2\beta_2 & -\frac{\rho_1}{\rho_2} \cos 2\beta_1 & \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin 2\beta_1 \\ \frac{V_{2S}^2}{V_{2P}^2} \sin 2\alpha_2 & -\cos 2\beta_2 & \frac{\rho_1 V_{1S}^2}{\rho_2 V_{1P}^2} \sin 2\alpha_1 & \frac{\rho_1}{\rho_2} \cos 2\beta_1 \end{bmatrix}$$

反射和透射系数矩阵为:

$$R_{SV2} = [R_{2S2P} \quad R_{2S2S} \quad T_{2S1P} \quad T_{2S1S}]^T$$

矩阵  $B_{SV2}$  为:

$$B_{SV2} = [\cos\beta_2 \quad \sin\alpha_2 \quad \sin 2\beta_2 \quad \cos 2\beta_2]^T$$

比较知道:(12)和(13)两式的转换纵波反射系数  $R_{1S1P}$  符号彼此相反, 转换纵波透射系数  $T_{1S2P}$  符号也彼此相反,(14)和(15)两式也是如此, P 波和 SV 波入射弹性界面的 Knott 方程具体情况见表 1。

### 3 结论

针对 XOZ 平面内 P 和 SV 平面简谐波正常入射到两个半空间弹性介质的水平界面情况, 结合牛滨华等学者对地震波场的研究工作<sup>[7]</sup>, 给出了 Knott 方程的所有表达形式, 同时, 对它们的相互特点进行了比较分析:

(1) 二维平面的选择决定位移矢量中分量的取

表1 P和SV波入射弹性界面的Knott方程

Table 1 Knott equations for incidences of P and SV waves at an elastic interface

波的入射方式	代表性公式编号	具体入射方式	坐标系	拉梅方程
P波和SV波从介质1入射弹性界面	P波入射, (8) SV波入射, (12)	左入射	勘探	右手
		左入射	物理	左手
		右入射	勘探	左手
		右入射	物理	右手
		左入射	勘探	左手
		左入射	物理	右手
P波和SV波从介质2入射弹性界面	P波入射, (9) SV波入射, (13)	右入射	勘探	右手
		右入射	物理	左手
		左入射	勘探	右手
		左入射	物理	左手
		右入射	勘探	右手
		右入射	物理	左手
P波和SV波从介质1入射弹性界面	P波入射, (10) SV波入射, (14)	左入射	勘探	右手
		左入射	物理	左手
		右入射	勘探	左手
		右入射	物理	右手
		左入射	勘探	左手
		左入射	物理	右手
P波和SV波从介质2入射弹性界面	P波入射, (11) SV波入射, (15)	右入射	勘探	右手
		右入射	物理	左手
		右入射	物理	左手

舍, 位移分量的表达形式又制约着拉梅方程中位移位的表达形式; 拉梅方程的选择决定边值定解条件的表述, 从而导致位移位表达的边界条件出现不同的形式; 坐标系的选择决定入射和反射及透射平面波的表达形式。3个因素的共同作用导致Knott方程表达形式上的差异。

(2)  $XOZ$  平面内P波入射弹性界面, Knott方程共有16种情形, 但最终Knott方程只有4种独立表达形式; 对于坐标系、入射方向、拉梅方程3个因素, 若固定任意两个, 变化第三个因素, Knott方程横波反射和透射系数符号彼此相反。

(3)  $XOZ$  平面内SV波入射弹性界面, Knott方程共有16种情形, 但最终Knott方程只有4种独立表达形式; 对于坐标系、入射方向、拉梅方程3个因素, 若固定任意两个, 变化第三个因素, Knott方程纵波反射和透射系数符号彼此相反。

对位移形式诺特方程的清晰认识可以有助于我们认识推导出AVO近似公式的位移形式的Zoeppritz方程, 从而在理论上认识地震波在弹性界面反射所需满足的边界限定条件, 深化对地震波传播理论和地震勘探的认识。

## 参考文献(References)

- [1] 何樵登, 熊维纲. 应用地球物理教程-地震勘探[M]. 北京: 地质出版社, 1991; 18-23. [HE Qiaodeng, XIONG Weigang. Applied Geophysics: Seismic Prospecting[M]. Beijing: Geological Publishing House, 1991; 18-23.]
- [2] 牛滨华, 孙春岩. 半空间各向同性单相固体弹性介质与地震波传播[M]. 北京: 地质出版社, 2005; 1-14, 43-49, 72-89, 99-106. [NIU Binhua, SUN Chunyan. Single-phase Solid of Half-space Isotropy as Elastic Medium and Seismic Wave Propagation[M]. Beijing: Geological Publishing House, 2005; 1-14, 43-49, 72-89, 99-106.]
- [3] 郭自强. 固体中的波[M]. 北京: 地震出版社, 1982; 117-120. [GUO Ziqiang. Waves in Solid[M]. Beijing: Seismology Press, 1982; 117-120.]
- [4] Ewing W M, Jardetzky W S, Press F. Elastic Waves in Layered Media[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957; 74-89.
- [5] Sheriff R E, Geldart L P. Exploration Seismology[M]. London: Cambridge University Press, 1982; 64-69.
- [6] Gutenberg B. Energy ratio of reflected and refracted seismic waves[J]. BSSA, 1944, 34(2): 85-102.
- [7] 牛滨华, 孙春岩, 李明. 各向同性介质与地震波传播[M]. 北京: 石油工业出版社, 2002; 103-116, 138-147. [NIU Binhua, SUN Chunyan, LI Ming. Isotropic Media and Seismic Wave Propagation[M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 2002; 103-116, 138-147.]
- [8] Tooley R D, Spencer T W, Sagoci H F. Reflection and transmission of plane compressional waves[J]. Geophysics, 1965, 18(4): 552-570.
- [9] Dix C H. Refraction and reflection of seismic waves[J]. Geophysics, 1939, 4(2): 81-101.
- [10] Muskat M, Meres M W. Reflection and transmission coefficients for plane waves in elastic media[J]. Geophysics, 1940, 5(2): 115-122.

## DIVERSITY AND UNITY FROM EXPRESSION OF KNOTT EQUATION ABOUT THE ELASTIC INTERFACE

PAN Haibin<sup>1</sup>, HE Yongjun<sup>2,3</sup>, ZHANG Yong<sup>2,3</sup>

(1 School of Engineering and Technology, China University of Geosciences, Beijing 100083, China;

2 The Key Laboratory of Marine Hydrocarbon Resources and Environment Geology, Ministry of Land and Resources, Qingdao 266071, China;

3 Qingdao Institute of Marine Geology, Qingdao 266071, China)

**Abstract:** Knott equation is the analytical indication of AVO theory. The amplitude ratios of incidents of harmonic plane waves at a plane interface between two elastic half spaces of different properties are governed by Knott equations, which are significant in the researches of elastic wave propagation and oil explorations. It is essential to learn the differences in expressions of Knott equations caused by different mathematic definitions and restrictions of a certain boundary value problem. The results show that there are totally 8 independent expressions from Knott equations for the incidences of plane harmonic P and SV waves in XOZ plane, in detail, 4 for P waves and 4 for SV waves. For those incidences of the same type in one half space with different Knott-equation expressions, their corresponding energy equilibrium equations are identical.

**Key words:** Knott equation; elastic interface; expression; 2D plane; Lamé equation; coordinate system; incident mode